PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
IKIP BUDI UTOMO MALANG

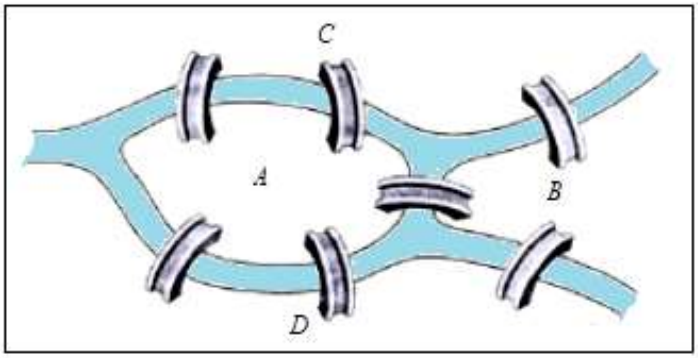
TEORI GRAPH

YUNIS SULISTYORINI

2018

PENGANTAR TEORI GRAPH

Apakah yang dimaksud dengan graph? Apa saja unsur-unsur graph? Permasalahan tentang graph berawal dari masalah jembatan di Konigsberg. Konigsberg merupakan kota tua di Prusia Timur yang dialiri oleh sungai Pregel. Pada abad ke 18, di kota tersebut terdapat 7 jembatan yang menghubungkan dua pulau (*A* dan *B*) dan dua daerah di tepi sungai (*C* dan *D*).



Penduduk sekitar sempat dibingungkan dengan permasalahan berikut ini.

> ***Dimulai dari daerah manapun yaitu A, B, C atau D seperti pada gambar di atas, mungkinkah seseorang bisa melewati seluruh jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula?***

Masalah tersebut menarik perhatian Leonhard Euler untuk memecahkannya. Euler adalah orang yang pertama kali memecahkan masalah ini secara matematis. *Bagaimana cara Euler memecahkan masalah jembatan Konigsberg? Mungkinkah kita bisa melewati seluruh jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula?*

GRAPH DAN UNSUR-UNSURNYA

Graph banyak berhubungan dengan kehidupan nyata. Selain untuk merepresentasikan masalah jembatan Konigsberg, graph juga dimanfaatkan untuk merepresentasikan jaringan komputer, internet, telepon, pipa gas dan air. Graph ini banyak bermanfaat di bidang kimia, fisika, genetika dan lain-lain. Graph membantu merepresentsikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut sehingga lebih mudah dipahami. Definisi graph secara matematis berikut ini disajikan dalam bahasa himpunan.

Definisi Graph

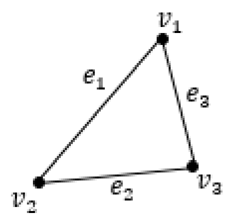
Graph G adalah pasangan dua himpunan yaitu $V(G)$ himpunan tak kosong yang anggotanya disebut titik dan E himpunan yang anggotanya disebut sisi.

Berdasarkan definisi tersebut, unsur-unsur yang membentuk graph adalah titik dan sisi. Beberapa hal yang perlu diperhatikan tentang titik dan sisi dalam graph adalah sebagai berikut.

- Nama lain dari titik adalah *vertex*, simpul, *point*, atau *node*.
- Nama lain dari sisi adalah *edge*, rusuk, ruas atau *line*.
- Sisi yang hanya mempunyai satu titik ujung disebut ***loop***.
- Dua atau lebih sisi yang mempunyai titik-titik ujung yang sama disebut ***sisi ganda*** atau ***paralel*** (***multiple edges*** atau ***parallel edges***)
- Dua titik dikatakan **terhubung (*adjacent*)** jika terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut.
- Titik ujung dari suatu loop dikatakan **terhubung (*adjacent*)** terhadap dirinya sendiri.
- Dua sisi dikatakan **terhubung (*adjacent*)** jika terdapat titik yang menghubungkan kedua sisi tersebut.
- Suatu sisi dikatakan **bersisian** (***incident)*** pada masing-masing titik ujungnya.
- Titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian disebut **titik terasing** atau **terisolasi**.
- Banyaknya titik (anggota V) dari suatu graph disebut order graph.
- Banyaknya sisi (anggota E) dari suatu graph disebut ukuran (*size*) graph.

Contoh 1

Tentukan himpunan titik dan himpunan sisi dari graph berikut ini.

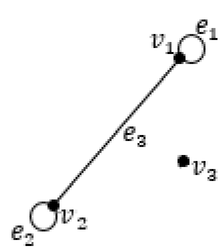


G_1

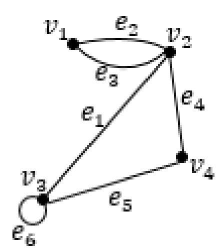
Himpunan titik $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$

Himpunan sisi $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3\} = \{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\}$

Tentukan himpunan titik dan himpunan sisi untuk G_2 dan G_3.



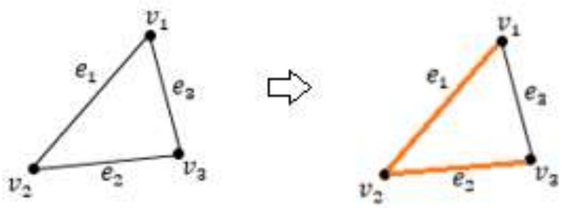
G_2



G_3

Pada masing-masing G_2 *dan* G_3 *tentukan pula:*

a. Semua sisi yang bersisian (*incident*) dengan v_1
b. Semua titik yang terhubung (*adjacent*) dengan v_2
c. Semua sisi yang terhubung (*adjacent*) dengan e_1
d. Semua loop
e. Semua sisi ganda
f. Semua titik yang terhubung (*adjacent*) dengan titik itu sendiri
g. Semua titik isolasi

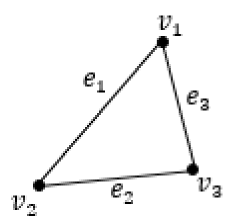


Perhatikan graph yang sisinya diberi warna (pada gambar yang kedua). Titik-titik dan sisi-sisi pada graph yang kedua merupakan bagian dari titik-titik dan sisi-sisi pada graph yang pertama. Graph yang kedua (graph dengan sisi yang diberi warna) ini dikatakan sebagai subgrah dari graph yang pertama.

Definisi Subgraph

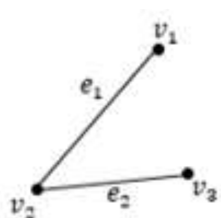
Misalkan $G = (V, E)$ dan $H = (W, F)$ graph. H dikatakan subgraph dari G jika $W \subseteq V$ dan $F \subseteq E$.

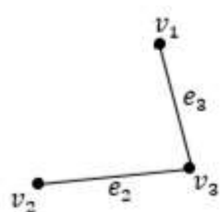
Contoh 2



G

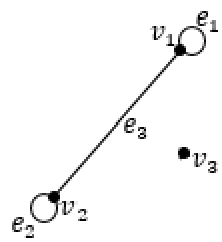
Contoh subgraph dari G adalah



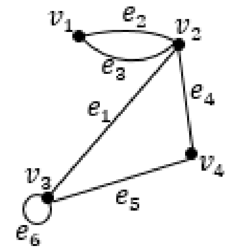


Adakah subgraph yang lainnya?

Temukan sebanyak-banyaknya subgraph dari graph H dan I berikut ini.



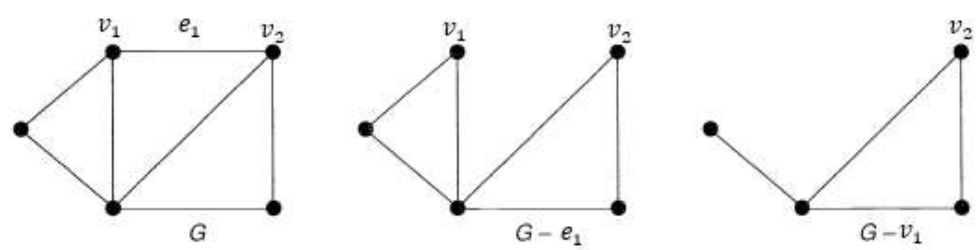
H



I

Sebagai tambahan, kita dapat memperoleh subgraph dengan menghapus sisi-sisi atau titik-titiknya dari suatu graph. Jika e sisi pada graph G maka subgraph $G - e$ diperoleh dengan menghapus sisi e dari graph G. Secara umum, jika F sebarang himpunan sisi dari graph G maka subgraph $G - F$ diperoleh dengan menghapus sisi-sisi di F dari graph G. Demikian juga, jika v titik pada graph G maka subgraph $G - v$ diperoleh dengan menghapus titik v sekaligus semua sisi yang berisisian (*incident*) dengan v dari graph G. Secara umum, jika S sebarang himpunan titik dari graph G maka subgraph $G - S$ diperoleh dengan menghapus titik-titik di S sekaligus dengan semua sisi yang bersisian (*incident*) dengan titik-titik di S dari graph G.

Contoh 3

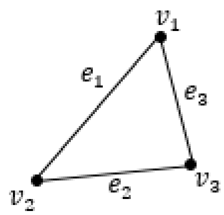


Definisi Komplemen Subgraph

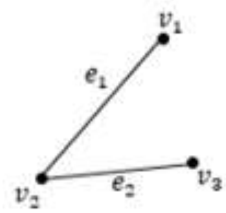
Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ merupakan subgraph dari graph G.

$G_2 = (V_2, E_2)$ merupakan komplemen dari subgraph G_1 terhadap graph G jika $E_2 = E - E_1$ dan V_2 merupakan himpunan titik yang anggotanya merupakan titik-titik yang bersisian (*incident*) dengan anggota E_2.

Contoh 4



Graph G



Subgraph G_1

Komplemen subgraph G_1

Tentukan komplemen dari masing-masing subgraph yang kalian temukan pada graph H dan I di Contoh 2.

GRAPH DAN UNSUR-UNSURNYA (2)

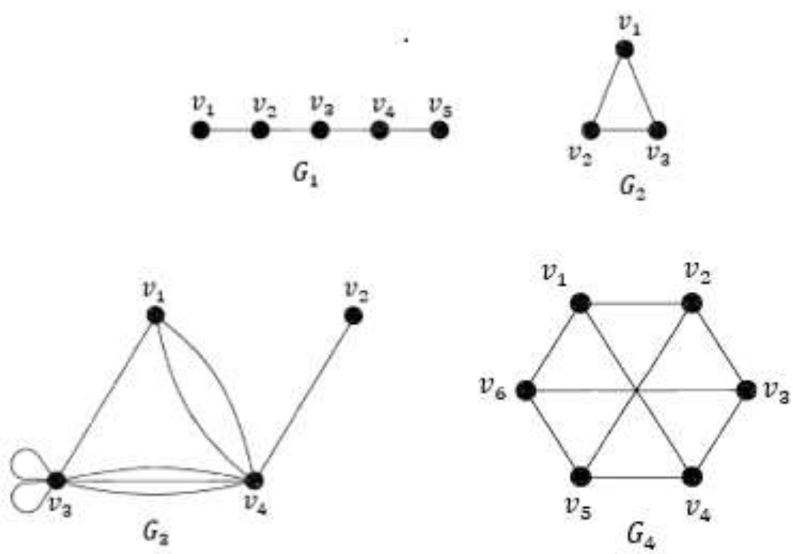
Definisi Derajat Titik

Derajat suatu titik v dalam graph G dilambangkan dengan $d(v)$ menyatakan banyaknya sisi yang bersisian (*incident*) dengan titik v.

Beberapa hal yang perlu diperhatikan terkait dengan derajat adalah sebagai berikut.

- Untuk loop derajat titik ujungnya adalah dua, sedangkan titik terisolasi adalah 0.
- ***Barisan derajat*** dari suatu graph terdiri dari derajat titik-titik pada graph yang disusun dalam urutan menaik dengan pengulangan yang diperlukan.
- ***Derajat graph*** adalah jumlah derajat semua titik dalam graph.

Contoh 1



Pada G_1, $d(v_1) = 1, d(v_2) = 2, d(v_3) = 2, d(v_4) = 2, d(v_5) = 1$

Barisan derajat $G_1 = (1, 1, 2, 2, 2)$

Derajat $G_1 = 8$

Tentukan juga derajat masing-masing titik dan barisan derajat dari graph G_2, G_3, G_4.

Fakta menunjukkan bahwa jumlah derajat semua titik dalam graph adalah dua kali banyak sisinya. *Mengapa?*

Hasil tersebut sering dikenal dengan istilah ***Lemma Jabat Tangan***.

Matriks Representasi

Graph sering direpresentasikan dalam bentuk diagram dari titik dan sisi. Namun, akan menjadi masalah jika terdapat graph dengan jumlah titik dan sisi yang banyak. Salah satu cara menyederhanakannya adalah dengan merepresentasikan graph dengan matriks. Matriks tersebut terdiri dari matriks *adjacency* atau keterhubungan dan matriks *incidence* atau kebersisian.

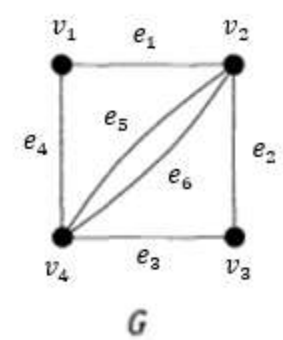
Definisi Matriks *Adjacency* atau Keterhubungan

Jika G graph dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ maka matriks *adjacency* A adalah matriks $n \times n$ dimana entri ke-ij menyatakan banyak sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j.

Definisi Matriks *Incidence* atau Kebersisian

Jika G graph dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ maka matriks *incidence* I adalah matriks $n \times m$ dimana 1 menunjukkan bahwa sisi e_j bersisian dengan titik v_i, sedangkan 0 menunjukkan bahwa sisi e_j tidak bersisian dengan titik v_i.

Contoh 2



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

JENIS-JENIS GRAPH

Graph Sederhana dan Tidak Sederhana

Graph yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda disebut sebagai graph sederhana (*simple graph*). Sedangkan graph yang mempunyai loop atau sisi ganda disebut graph tidak sederhana (*multiple graph*).

Coba berikan contoh graph sederhana dan tidak sederhana.

Graph Berarah dan Tidak Berarah

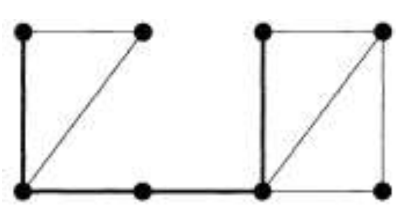
Graph yang sisinya tidak mempunyai arah disebut graph tidak berarah (*undirected graph*). Sedangkan graph yang yang setiap sisinya mempunyai arah disebut graph berarah (*directed graph* atau *digraph*).

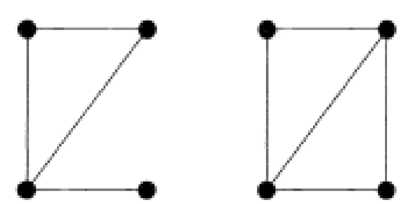
Coba berikan contoh graph berarah dan tidak berarah.

Graph Terhubung dan Tidak Terhubung

Graph yang setiap pasang titiknya mempunyai lintasan disebut graph terhubung, sedangkan sebaliknya disebut graph tidak terhubung.

Perhatikan dua graph di bawah ini. Tentukan manakah yang termasuk graph terhubung dan manakah yang termasuk graph tidak terhubung.





Graph Khusus

1. **Graph Nol (*Null Graph*)**

   Graph nol adalah graph yang himpunan sisinya kosong. Graph nol dengan n titik dinotasikan dengan N_n.

2. **Graph Reguler (*Regular Graph*)**

   Graph reguler adalah graph yang masing-masing titiknya berderajat sama. Jika masing-masing titik berderajat r, graph dikatakan sebagai reguler dengan derajat r atau r-reguler. Salah satu graph reguler khusus adalah graph nol N_n yang reguler dengan derajat 0.

3. **Graph Komplit (*Complete Graph*)**

   Graph komplit adalah graph sederhana dengan masing-masing pasangan titik yang berbeda terhubung. Graph komplit dinotasikan dengan K_n dengan n menyatakan banyaknya titik pada graph. Perhatikan bahwa K_n mempunyai sebanyak $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi. Jika memperhatikan definisi graph komplit maka dapat dikatakan bahwa K_n reguler dengan derajat $n-1$.

4. **Graph Sikel (*Cycle Graph*)**

   Graph sikel adalah graph terhubung yang reguler dengan derajat 2. Graph sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n.

5. **Graph Lintasan (*Path Graph*)**

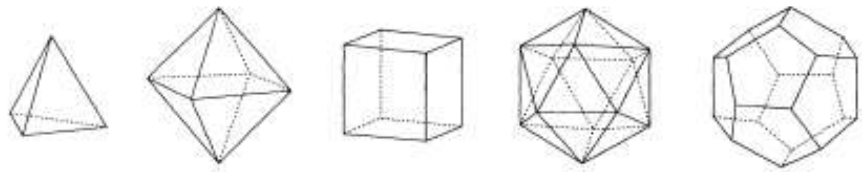
   Graph yang diperoleh dari graph sikel C_n dengan menghapus satu sisi disebut graph lintasan dengan n titik. Graph lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n.

6. **Graph Roda (*Wheel*)**

   Graph yang diperoleh dari graph sikel C_{n-1} dengan menghubungkan masing-masing titik ke satu titik v yang baru disebut dengan roda dengan n titik. Graph roda dengan n titik dinotasikan dengan W_n.

7. **Graph Platonik (*Platonic Graph*)**

   Salah satu bagian dari graph reguler adalah graph Platonik yang dibentuk oleh titik-titik dan sisi-sisi dari bangun ruang reguler. Platonik terdiri tetrahedron, oktahedron, kubus, icosahedron, dan dodecahedron.



8. **Graph Bipartisi (*Bipartite Graph*)**

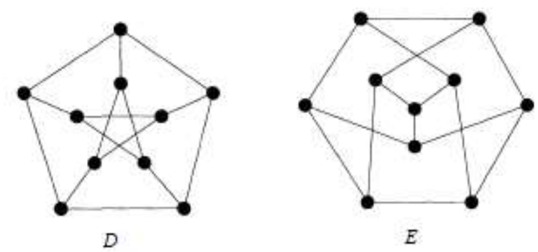
   Jika himpunan titik dari graph G dapat dibagi menjadi dua himpunan A dan B yang saling asing dimana masing-masing sisi menghubungkan titik di himpunan A dan B maka G dikatakan sebagai graph bipartisi. Dengan kata lain, graph bipartisi dapat dibentuk dengan memberikan warna hitam dan putih pada titik-titik dalam graph sedemikian sehingga masing-masing sisi menghubungkan titik hitam (pada himpunan A) dan titik putih (pada himpunan B).

9. **Graph Bipartisi Komplit (*Complete Bipartite Graph*)**

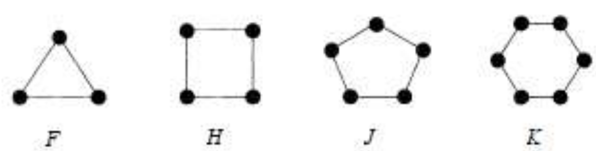
   Graph bipartisi komplit adalah graph bipartisi yang masing-masing titik pada himpunan A dihubungkan oleh tepat satu sisi dengan titik pada himpunan B. Graph bipartisi komplit dengan r titik hitam dan s titik putih dinotasikan dengan $K_{r,s}$. Perhatikan bahwa graph $K_{r,s}$ mempunyai $r + s$ titik dan rs sisi.

REVIEW MATERI

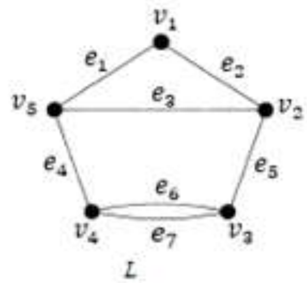
1. Tentukan apakah pernyataan berikut ini benar atau salah. Jelaskan.
    a. Jika banyak anggota himpunan sisi $E(G)$ adalah tiga dan banyak anggota himpunan titik $V(G)$ adalah nol maka G adalah graph dengan tiga sisi.
    b. Titik ujung pada loop dikatakan terhubung dengan dirinya sendiri.
    c. Jika diketahui A subgraph dari graph G dan B komplemen subgraph A terhadap graph G maka gabungan dari A dan B adalah graph G.
    d. Jika suatu titik mempunya satu sisi dan satu loop yang bersisian dengannya maka derajat titik tersebut adalah dua.
    e. Jika derajat suatu titik adalah nol maka titik tersebut merupakan titik terasing.
2. Gambarkan graph C dengan barisan derajat $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$.
3. Bagaimama perubahan yang terjadi pada graph C pada soal nomor 2 jika barisan derajatnya menjadi $(2, 3, 3, 4, 5, 5)$.
4. Diketahui graph D dan E berikut ini.



Manakah dari graph-graph berikut ini yang merupakan subgraph dari graph D dan E.



5. Tentukan matriks kerterhubungan dan kebersisian dari graph L berikut ini.



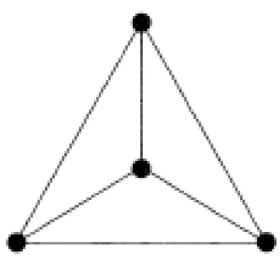
6. Gambarkan graph M jika diketahui matriks keterhubungannya sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

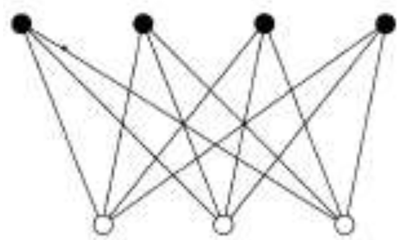
7. Gambarkan graph N jika diketahui matriks kebersisiannya sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

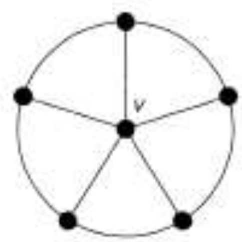
8. Jika graph G tidak mempunyai loop, apa yang dapat dikatakan tentang matriks keterhubungan dan kebersisiannya?
9. Tentukan jenis masing-masing graph berikut ini.



(a)

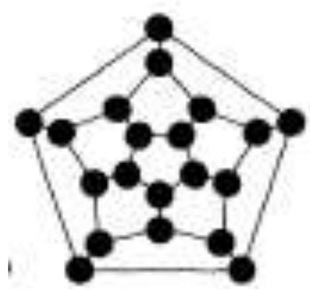


(b)

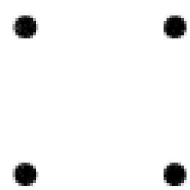


(c)

(d)

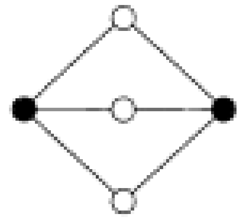


€

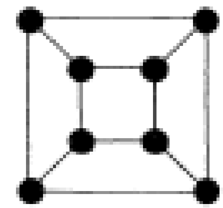


(f)

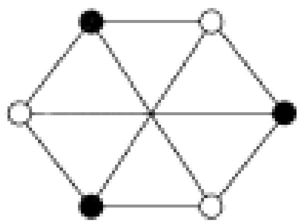
(g)



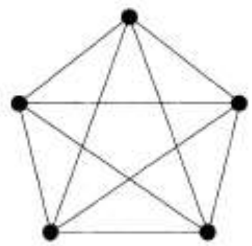
(h)



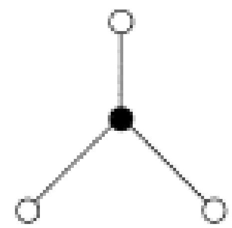
(i)



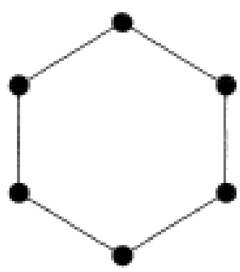
(j)



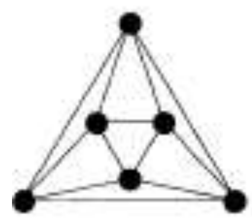
(k)



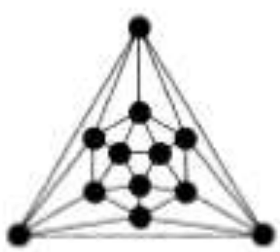
(l)



(m)



(n)



(o)

(p)